$$\int \operatorname{cosech}^2 x \ dx = -\coth x + c$$

مثال: احسب التكامل $\int (2+\sin 3x)^2 \, dx$

الحل:

$$\int (2+\sin 3x)^2 \, dx = \int (4+4\sin 3x + sin^2 3x) \, dx$$

$$= 4x - \frac{4}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x) dx = 4x - \frac{4}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c$$

الباب الثالث

طرق التكامل

Methods of Integration

فى الباب السابق قد ذكرنا جدول التكامل الذى يحتوى على تكاملات لدوال قياسية. وإذا لم نتمكن من إيجاد تكامل دالة ما من الجدول مباشرة ، فإنه توجد طرق كثيرة للتكامل نتبعها ، ولكل من هذه الطرق حالة استخدام معينة.

وفيما يلي سوف نوجز بعض طرق التكامل المختلفة ومنها:-

١- التكامل بالتعويض المناسب مع بعض قواعد خاصة.

٢- التكامل بإزالة الجذور وهى إحدى صور التعويض.

٣- تكاملات تحتوى على دوال مثلثية. أى تكاملات على الصورة:

$$I = \int F(\sin x\,, \cos x)\, dx$$

٤- تكامل الكسور فى كل حالاتها المختلفة.

وبالإضافة الى ذلك فإنه توجد طرق أخرى هامة مثل قاعدة التكامل بالتجزئوالاختزالالمتتالي. ونظرًا لأهمية هاتان القاعدتان سوف نخصص لهما الباب الرابع. والآن سوف نقوم بدراسة مفصلة لطرق التكامل سابقة الذكر مع إعطاء بعض الأمثلة المختلفة التى تساعد على حل المسائل.

أولاً: التكامل بالتعويض

Integration by substitution

قد لا نستطيع أحياناً إيجاد قيمة التكامل مباشرة ، ولذلك نستخدم تعويض مناسب u يساعدنا فى تبسيط وحساب قيمة التكامل.

لنفرض أن $\int f(x)\,dx = F(x)$ وعلى ذلك فإنه $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

فإذا أخذنا التعويض $x = \varphi(u)$ فإن $f\big(\varphi(u)\big) = \frac{dF(\varphi(u))}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

أى أن $\frac{dF(\varphi(u))}{du} = f\big(\varphi(u)\big)\frac{dx}{du} = f\big(\varphi(u)\big)\acute{\varphi}(u)$

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة للمتغير الجديد u نجد أن:

$$\int \frac{dF\big(\varphi(u)\big)}{du}\,du = \int f\big(\varphi(u)\big)\,\acute{\varphi}(u)du$$

$$\int \frac{dF}{du}\big(\varphi(u)\big)\,du = F\big(\varphi(u)\big) = F(x) = \int f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(u)\big)\acute{\varphi}(u)du$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة التكامل بالتعويض.

<u>مثال(١):</u> أوجد التكامل $I = \int 2x\, e^{x^2} dx$

<u>الحل:</u> نأخذ التعويض $u = x^2$ ومنه نجد أن $du = 2x\,dx$ وبالتالى فإن

$$I = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2} + c$$

<u>مثال(٢):</u> عين التكامل $I = \int x\sqrt{x-1}\,dx$

<u>الحل:</u> نضع $u^2 = x - 1$ وعلى ذلك فإن $dx = 2u\,du$ ومن ثم نجد أن

$$I = \int (u^2+1)u \cdot 2u\, du = 2\int (u^4+u^2)\, du = 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)+c$$

$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال (٣):احسب التكامل $I = \int \frac{x\,dx}{1+x^4}$

الحل: نأخذ التعويض $u = x^2$ ومنه $du = 2x\,dx$ وبالتالى فإن

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + c = \frac{1}{2}\tan^{-1} x^2 + c$$

مثال (٤):أوجد التكامل $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

الحل: بوضع التعويض $u = x^3$ ومنه $du = 3x^2 dx$ وبذلك فإن

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1} u + c = \frac{1}{3}\sin^{-1} x^3 + c$$

ملحوظة هامة: في التكاملات التي على الصورة الخاصة:

$$I = \int f(ax+b)dx$$

نأخذ التعويض $u = ax+b$ ومنه $du = a\,dx$ أى أن $dx = \frac{1}{a}du$ وبالتالى فإن

$$I = \int f(ax+b)dx = \int f(u)\cdot\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int f(u)\, du$$

فعلى سبيل المثال لحساب التكامل $I = \int \frac{dx}{(8-3x)^2}$ فإننا فى هذه الحالة نضع $u = 8 - 3x$ أى أن $du = -3\,dx$ ومنها $dx = -\frac{1}{3}du$ ومن ثم فإن

$$I = \int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \int \frac{1}{u^2} \cdot -\frac{1}{3}du = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{3}(-1)u^{-1} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u} + c = \frac{1}{3(8-3x)} + c$$

<u>أمثـــــــــــــــــلة:</u>

(1) $$\int x^2 (x^3+1)^4 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+1)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + c$$

(2) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+1} + c$$

(3) $$\int \frac{x^3}{2x^4+5}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x^3}{2x^4+5}dx = \frac{1}{8}\log(2x^4+5) + c$$

(4) $$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$= \int (1-u^2)dx$$ بوضع $u = \cos x$

$$= -\left[u - \frac{u^3}{3}\right] + c = -\left[\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right] + c$$

(5) $$\int \frac{\cos 2x}{3+5\sin 2x}dx = \frac{1}{10}\int \frac{10\cos 2x}{3+5\sin 2x}dx$$

$$= \frac{1}{10}\log(3 + 5\sin 2x) + c$$

(6) $$\int \frac{\sin 2x}{\alpha\ \sin^2 x + \beta} x\ = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\alpha \cdot 2\sin x\cos x}{\alpha\ \sin^2 x + \beta}\ dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\log(\alpha\sin^2 x + \beta) + c$$

(7) $$\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\log x} = \log(\log x) + c$$

(8) $$\int \frac{dx}{1 - e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log(e^x - 1) + c$$

(9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)} = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x} - 1} = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= 2\log\left(\sqrt{x} - 1\right) + c$$

(10) $$\int \frac{\sec^2 2x}{(1 + \tan 2x)^2} dx = \int \sec^2 2x\,(1 + \tan 2x)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\sec^2 2x\,(1 + \tan 2x)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \tan 2x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{2(1 + \tan 2x)} + c$$

(11) $$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\cos x\,dx = \int \cos^4 x\,d(\sin x)$$

ثم بوضع $u = \sin x$ نجد أن:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^2\,d\,(\sin x) = \int (1 - u^2)^2 du$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4)du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

(12) $$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \tan x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x\, dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

$$= \int \tan x\, d(\tan x) - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \log \sec x + c$$

(13) $$\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x + 5}} dx = -\frac{1}{3}\int (-3\sin 3x)\,(\cos 3x + 5)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2(\cos 3x + 5)^{-\frac{1}{2}} + c$$

(14) $$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{dx}{u(u-1)}$$

في هذه الحالة نضع $u = 1 + e^x$

$$du = e^x dx$$

أي أن $dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$

$$= \int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{du}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}}\tanh^{-1}\frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -2\tanh^{-1}(2u - 1) + c = -2\ \tanh^{-1}[2(1 + e^x) - 1] + c$$

$$= -2\tanh^{-1}(2e^x + 1) + c$$

ويمكن إيجاد التكامل السابق بطريقة أخرى وذلك بضرب البسط والمقام فى e^x.